Ueber die

Erniedrigung des Geschlechtes Abelscher Integrale,

insbesondere elliptischer und hyperelliptischer, durch Transformation.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät, Sektion II,

bei der

K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

eingereicht am 22. Februar 1907

von

F. H. Cramer,
gepr. Lehramtskandidat
aus Schwabach (Mittelfranken).

ACAD. LUDWIGS-BIBL.

Erlangen 1907.
Druck der Universitäts-Buchdruckerei von E. Th. Jacob.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552325_0152

Die Anregung zu dieser Arbeit, durch den Hinweis auf die Abhandlung von Goursat im 15. Bande des Bulletin de la Société Mathématique de France, verdanke ich Herrn Professor Lindemann. Seiner Güte bin ich insbesondere auch dafür verbunden, dass ich die Korrekturbogen der im Erscheinen begriffenen neuen Auflage von Clebschs Vorlesungen über Geometrie zur Information benützen durfte. Auch an dieser Stelle sei dafür herzlichster Dank gesagt.

Unter Reduktion eines arithmetischen Ausdrucks versteht man seine Ueberführung in eine der ursprünglichen gegenüber als ausgezeichnet zu betrachtende Form.

In der Theorie der Integrale algebraischer Funktionen haben sich aus diesem allgemeinen mehrere spezielle Reduktionsbegriffe entwickelt.

Einmal nennt man Reduktion eines zu einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche gehörigen Integrals (vom Geschlechte 1 oder 2) eine solche Umänderung des Produktes der Verzweigungspunkte durch Transformation, dass die Lage der neuen Verzweigspunkte vorgeschriebenen, den weiteren Rechnungen und Schlüssen zu Grunde liegenden Bedingungen genügt (Legendre, Richelot).

Sodann versteht man unter Reduktion eines allgemeinen Abel'schen Integrals seine Zerfällung in Riemannsche Normalintegrale der 3 Gattungen.

Endlich aber bezeichnet man als Reduktion auch die etwa mögliche Herstellung einer neuen Gestalt des Integrals, bei der die zugehörige Riemannsche Fläche (oder algebraische Gleichung) von niedrigerem Geschlecht ist.

Wenn wir im Folgenden von der Reduktion eines Abelschen Integrals sprechen, so soll dieser Ausdrucksweise stets der zuletzt erläuterte Sinn beigelegt sein.

Das umfassendste Problem, das man sich in dieser Hinsicht vom algebraischen Standpunkte aus stellen kann, wäre das folgende:

> Das allgemeinste Abelsche Differential vom Geschlechte p, das sich auf eine Summe von Differentialen, deren Geschlecht je die Zahl $q < p$ nicht übersteigt, durch eine algebraische Transformation von gegebenem Charakter, ins-

besondere von gegebener „Ordnung“ s reduzieren lässt, auf algebraische Art vollkommen und möglichst einfach zu kennzeichnen, so dass von jedem vorgelegten Abelschen Differential mit Hilfe einer endlichen Anzahl durchsichtiger Operationen mit völliger Sicherheit entschieden werden kann, ob Reduktion der verlangten Art möglich ist; sodann aber: Einfache Methoden anzugeben, um für irgend welche Zahlen p, q, s, das allgemeinste reduzierbare Integral, seine reduzierte Gestalt und die reduzierenden Substitutionen durch die grösstmögliche Zahl frei beweglicher Parameter darzustellen.

Man ist weit davon entfernt, dieses Problem vollständig und befriedigend gelöst zu haben. Indessen ist eine nicht unbeträchtliche Literatur entstanden, welche sich mit dem spezielleren Problem der Reduktion auf ein einzelnes Differential vom Geschlechte q durch „rationale“ Transformation beschäftigt. Und zwar hat man dazu zwei getrennte Wege eingeschlagen, die man als den transzendenten und den algebraischen unterscheiden kann.

Für die erste dieser Betrachtungsweisen liegt eine weitere Vereinfachung des Untersuchungszieles nahe nach dem von Weierstrass[1]) für q = 1 ausgesprochenen, nach Wirtinger[2]) für beliebiges p giltigen Satz, dass eine Klasse Abelscher Integrale, in der sich reduzierbare Indegrale in dem eben eingeschränkten Sinn vorfinden, jederzeit insbesondere reduzierbare Integrale erster Gattung enthält, und zwar, wie eine sehr einfache Ueberlegung zeigt, mindestens q linear unabhängige, durch die gleichen Substitutionen reduzierbare; denn nunmehr konzentriert sich das Interesse auf die Aufsuchung dieser letzteren Integrale. Und da Integrale erster Gattung, deren p-fache Mannigfaltigkeit ja mit der Riemannschen Fläche zugleich gegeben ist, durch ihre 2p Periodizitätsmoduln vollkommen bestimmt sind (sogar schon durch die p ersten derselben), so erhebt sich die Frage, ob nicht speziell die reduzierbaren Integrale (1. Gattung) hinsichtlich ihrer Perioden durch einfache und charakteristische Eigenschaften ausgezeichnet sind.

Dies ist nun in der Tat der Fall. Es erweist sich nämlich als eine nicht nur, wie erklärlich, notwendige, sondern auch hinreichende Eigenschaft der q · 2p Periodizitätsmoduln $\Omega_{\mu,\varepsilon}$ ($\mu = 1,..\,q$; $\varepsilon = 1,\ldots 2p$) unserer q reduzierbaren Integrale, dass sie durch die q · 2q Periodizitätsmoduln $\omega_{\mu,\alpha}$ von q Integralen des Geschlechtes q mit Hilfe von 2p · 2q ganzen Zahlen $m_{\varepsilon,\alpha}$ in der Form dargestellt werden können:

$$\Omega_{\mu,\varepsilon} = \sum_{1}^{2q}{}_{\alpha}\, m_{\varepsilon,\alpha}\, \omega_{\mu,\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1 \ldots q \\ \varepsilon = 1 \ldots 2p \end{pmatrix}.$$

1) Bei S. Kovalevska, Acta Math. Bd. 4.
2) Enc. d. M. W. II², 2, p. 166.

Auf Grund dieses Resultats sagt ein durch direkte Rechnung zu gewinnender Satz aus, dass die q Systeme von je 2p Periodizitätsmoduln durch eine Periodentransformation höheren Grades (im Sinne von Hermite und H. Weber) notwendig (gleichzeitig) auf die Form normaler Systeme gebracht werden können, bei denen nicht nur je p — 1 der Perioden an den Schnitten A_i, sondern überdies auch die sämtlichen Perioden an den p — q letzten Schnitten $B_{q+1} \ldots B_p$ verschwinden; zugleich ist damit die Zusammensetzbarkeit der Perioden $\Omega_{\mu,\varepsilon}$ in der obigen Form durch die Periodensysteme von q gleichfalls normalen Integralen des Geschlechtes q in Evidenz gesetzt. Eine unmittelbare Folge dieses wichtigen Theorems ist das andere, dass es in der Klasse ausser den q linear unabhängigen auf das Geschlecht q reduzierbaren Integralen 1. Gattung p — q weitere, unter sich und von den früheren linear unabhängige geben muss, die auf das Geschlecht p — q gebracht werden können; oder, wie man es gleichfalls ausdrücken mag, dass die Thetafunktion beliebiger Charakteristik von p Variabeln, welche dem gegebenen reduzierbaren algebraischen Gebilde nach erfolgter kanonischer Zerschneidung der Riemannschen Fläche eindeutig zugeordnet ist, in das Produkt einer Thetafunktion von q Variabeln und einer solchen von p — q Variabeln zerfällt, wenn man sie einer Transformation höherer Ordnung unterwirft: Man braucht, um alles das einzusehen, zu jenen q normalen Periodenreihen von je 2p Moduln nur p — q andere hinzuzunehmen, die sie zu einem vollen System ergänzen.

So interessant Ergebnisse dieser Art auch sonst sein mögen, so liefern sie doch nur eine geringe Ausbeute für den hier ins Auge gefassten Zweck. Es ist nämlich bis jetzt nur für den Fall p = 2, q = 1 gelungen, auf sie ein Verfahren zu gründen, um die algebraische Beziehung zwischen den Konstanten des, alsdann stets hyperelliptischen, Gebildes und die reduzierbaren Integrale selbst zu berechnen. Die beiden, von einander unabhängigen, reduzierbaren Integrale, die sich nach den angeführten Sätzen dann in der Klasse befinden, können — das ist ein weiterer Satz in der Richtung der bisherigen — durch lineare Transformation der Perioden, d. h. durch eine veränderte kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche, zu normalen gemacht werden, mit einem Modul a_{12} (τ_{12}) gleich einem rationalen, dem s^{ten} Teil von πi; die reduzierende Transformation ist dann, wie Picard bewiesen hat[1]), von der s^{ten} Ordnung im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Die Lösung wird nun ermöglicht durch die Bemerkung, dass

---

1) Bulletin de la Soc. M. de Fr. Bd. 11, 1883; die Frage, inwieweit einer Periodentransformatinn s^{ter} Ordnung eine rationale Transformation des Integrals (von der s^{ten} Ordnung) entspricht, scheint allgemein nicht erledigt zu sein.

$$\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}((u))_{sa,\,\pi i,\,sb} \equiv \vartheta\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}((u))_{sa,0,sb} \equiv \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1)_{sa}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_2)_{sb}$$

für die Nullwerte der Argumente der von vornherein bekannten Wert 0 besitzt. $\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}((0))_{sa,\,\pi i,\,sb}$ lässt sich aber durch die Thetanullwerte der 16 Thetafunktionen mit den Moduln a, $\frac{\pi i}{s}$, b ausdrücken; und wenn man noch von diesen Thetanullwerten vermittelst der Rosenhainschen Formeln zu den Richelotschen Moduln oder auch zu zu den damit äquivalenten Doppelverhältniswerten der 6 Verzweigungspunkte übergeht, so ist man sicher, die gesuchte Beziehung zwischen diesen erhalten zu haben, da ja nach dem Gesagten der Wert $\frac{\pi i}{s}$ für den Modul a_{12} eines normalen Integrals erster Gattung und zweiten Ranges es unzweideutig als reduzierbar charakterisiert.

Um hierauf die beiden reduzierbaren Normalintegrale $\int\frac{B_1-C_1x}{y}\,dx$ und $\int\frac{B_2-C_2x}{y}\,dx$ selbst zu finden, zieht man die Rosenhainschen Formeln herbei, welche die in ihnen vorkommenden Konstanten durch die Werte der Thetafunktionen und ihrer ersten Ableitungen nach den beiden unabhängigen Veränderlichen für die Nullwerte dieser letzteren ausdrücken, und führt, als Parameter, die Werte elliptischer Thetafunktionen für verschwindendes Argument ein; dass ist in unserem Falle möglich auf Grund der allgemeinen Gleichung

$$\vartheta\begin{bmatrix}g_1 & g_2\\ h_1-g_2, & h_2-g_1\end{bmatrix}((u))_{sa,\,si,\,sb} \equiv \vartheta\begin{bmatrix}g_1\,g_2\\ h_1\,h_2\end{bmatrix}((u))_{sa,0,sb} \equiv \vartheta\begin{bmatrix}g_1\\ h_1\end{bmatrix}(u_1)_{sa}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}g_2\\ h_2\end{bmatrix}(u_2)_{sb},$$

von der die oben angegebene ein spezieller Fall ist. Neue Schwierigkeiten bereitet aber die Aufstellung der reduzierenden Substitution, und es bedarf erneuter Kunstgriffe, um sie zu überwinden.

Für die einfachsten Fälle: s = 2 und s = 4 sind solche Rechnungen von verschiedenen Autoren vollständig durchgeführt [2]). Sie erfordern einen ziemlich erheblichen Aufwand an Formeln und Geschick in der Behandlung derselben, wenn die Rechnung einigermassen elegant verlaufen soll [3]).

---

1) Der Mangel analoger Formeln für $p > 2$ hindert die Ausdehnung auf den Fall $p > 2$, $q = 1$ schon an sich

2) Für s = 2 von Königsberger und namentlich Pringsheim, für s = 4 von Bolza und Igel; im Falle s = 3 scheinen sich weniger leicht Formeln darzubieten, welche den Zusammenhang zwischen einer Thetafunktion und einer anderen von den dreifachen (oder drittels) Moduln vermitteln.

3) Man vgl. zu dem Vorhergehenden die Darstellung und die Literaturangaben im letzten Kapitel des ausgezeichneten neuen Lehrbuchs der

Von grösserer Wichtigkeit als diese Methode, „durch einen — etwas verschlungenen — Umweg auf den Weg zu kommen", scheinen uns die Ueberlegungen, welche darauf abzielen, unsere algebraische Frage, — denn so kann man sie wohl füglich nennen —, auf rein algebraische Weise zu behandeln. Wir suchen den Kreis der Ueberlegungen zu umschreiben, die man in dieser Richtung angestellt hat oder doch anstellen kann.

Vor allem handelt es sich um Aussonderung derjenigen Klassen algebraischer Gleichungen, welche überhaupt zu reduzierbaren Integralen Anlass geben können. Dazu führt die folgende Erwägung: Soll durch „rationale" Transformation $\xi = R_{\lambda_0}(x, y)$, $y = R_{\mu_0}(x, y)$ eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ vom Grade λ in y, μ in x, und vom Geschlechte p in eine andere Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ vom Grade λ_0 in η, μ_0 in ξ, und vom Geschlechte $q < p$ übergehen, so kann, nach dem Riemannschen Satze von der Erhaltung des Geschlechtes einer Kurve bei birationaler Transformation, diese Transformation nicht birational sein. Einer bestimmten Stelle (ξ, η) des transformierten Gebildes müssen also mehrere Stellen des ursprünglichen entsprechen, und da R_{λ_0} jeden Wert ξ, R_{μ_0} jeden Wert η nur endlich oft, nämlich λ_0-mal, bez. μ_0-mal annimmt, so ist die Anzahl dieser Stellen eine endliche Zahl $r > 1$; da r eine ganze Zahl ist, so kann sie sich aus Gründen der Kontinuität nicht von Stelle zu Stelle ändern, und bleibt also durchaus konstant. Damit stimmt überein, dass nach arithmetischen Prinzipien die linke Seite der Gleichung zwischen ξ und η entweder irreduzibel oder Potenz einer irreduziblen Funktion sein muss: Diese Gleichung lautet genauer $[\varphi(\xi, \eta)]^r = 0$.

Es gibt also zu jeder Stelle (ξ, η) des transformierten r Stellen x, y; x_1, y_1; .... x_{r-1}, y_{r-1} des ursprünglichen Gebildes, derart, dass

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R_{\lambda_0}(x, y) = R_{\lambda_0}(x_1, y_1) = \ldots = R_{\lambda_0}(x_{r-1}, y_{r-1}) \\ \eta &= R_{\mu_0}(x, y) = R_{\mu_0}(x_1, y_1) = \ldots = R_{\mu_0}(x_{r-1}, y_{r-1}) \end{aligned}\right\}$$

Denkt man sich noch diese Gleichungen nach x, y aufgelöst, so erkennt man,

dass eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$, zu der reduzierbare Abelsche Integrale gehören sollen, notwendig algebraische Substitutionen

$$x = X_\sigma(x_\sigma, y_\sigma),$$
$$y = Y_\sigma(x_\sigma, y_\sigma)$$

in sich zulässt; und

dass die Reduktion nur geleistet werden kann durch solche rationale Funktionen $\xi = R_{\lambda_0}(x, y)$,

---

Thetafunktionen von Krazer, Leipzig 1903; gedrängter und weniger allgemein ist die Darstellung im letzten Kapitel des Werkes von Baker, Abels theorem and the allied theory, etc., Cambridge 1897.

$y = R_{\mu_0}(x, y)$ welche für solche Substitutionen absolut invariant sind.

Diese Substitutionen werden überdies im einfachsten Falle, wenn $r = 2$ ist, birational sein, weil alsdann jeder Stelle (x, y) des Gebildes (durch Vermittlung des Wertepaares (ξ, η)) nur eine einzige andere Stelle (x_1, y_1) zugeordnet ist; sie können jedoch auch wenn $r > 2$ ist unter Umständen birational ausfallen.

Man gewinnt so Anschluss an die allgemeine Theorie der auf einem algebraischen Gebilde möglichen Korrespondenzen, welche man Hurwitz verdankt, und insbesondere an die von ihm und Wiman aufgestellten Sätze über Gruppen von eindeutigen Transformationen eines Gebildes in sich[1]). Darnach gibt es zu einer beliebigen vorgelegten Gruppe, also etwa zu einer beliebigen Pernutationsgruppe, stets algebraische Gleichungen, die eine isomorphe Gruppe birationaler Transformationen gestatten[2]). Soll dann die invariante Gleichung speziell hyperelliptisch sein, so ist ihre Gruppe notwendig hemiedrisch isomorph zu einer der endlichen Gruppen linearer Substitutionen, indem die zweiwertige Hauptfunktion sich nach einer solchen substituieren muss.

Es gilt nun weiter der fundamentale Satz[3]):

Ruduzierbare Abelsche Differentiale, die also zu einer invarianten Gleichung $f(x, y) = 0$ gehören, müssen für dieselben Transformationen dieser Gleichung in sich absolut invariant sein, wie die beiden reduzierenden rationalen Funktionen.

Der wegen des Ineinandergreifens von Formgleichheit und Wertgleichheit etwas subtile Beweis stellt sich folgendermassen. Denkt man sich das ursprüngliche Differential aus dem transformierten durch Einsetzen für ξ, η hervorgehend, so ergibt es sich als Produkt der Beiträge, welche einerseits $\frac{d\xi}{dx} \cdot dx$, andererseits die als Faktor daneben stehende rationale Funktion von ξ, η liefern. Dass dieser letztere dieselben Substitutionen gestattet, wie die Funktionen ξ und η, ist evident; es bleibt zu beweisen, dass

---

1) Auch an die Untersuchungen von Kantor und Wiman über Gruppen von Cremonatransformationen in der Ebene, da nach Wiman bei einer solchen Gruppe im allgemeinen auch eine hyperelliptische Kurve invariant bleibt; man vgl. zu alledem: Enc. d. M. W. II^3, 2, No. 52, 53; IB, 3 f, 24, 25.

2) Aus den Eigenschaften der Gruppe lässt sich eine (wahre) untere Grenze für das Geschlecht der zugehörigen invarianten Gleichungen ableiten: „Geschlecht" der Gruppe!

3) Dem Sinne nach findet sich dieser Satz als reine Behauptung, ohne Beweisandeutung, in einer sogleich noch zu nennenden, etwas unklaren Abhandlung von F. de Brun.

$\frac{d\xi}{dx} \cdot dx$ invariant ist. Führen wir also hier die neue Variable x_σ ein vermöge

$$\left.\begin{aligned} f(x_\sigma, y_\sigma) &= 0, \\ x &= X_\sigma(x_\sigma, y_\sigma) = \mathfrak{X}_\sigma(x_\sigma) \\ y &= Y_\sigma(x_\sigma, y_\sigma) = \mathfrak{Y}_\sigma(x_\sigma) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so wird $\frac{d\xi}{dx} \cdot dx = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{\substack{x = \mathfrak{X}_\sigma(x_\sigma) \\ y = \mathfrak{Y}_\sigma(x_\sigma)}} \cdot \frac{dx}{dx_\sigma} \cdot dx_\sigma,$

oder, weil $\frac{dx}{dx_\sigma} \equiv \left(\frac{dx}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx_\sigma}\right)_{\substack{x = \mathfrak{X}_\sigma(x_\sigma) \\ y = \mathfrak{Y}_\sigma(x_\sigma)}}$

$$= \left\{\frac{d\xi}{dx_\sigma}\right\}_{\substack{x = \mathfrak{X}_\sigma(x_\sigma) \\ y = \mathfrak{Y}_\sigma(x_\sigma)}} : \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{\substack{x = \mathfrak{X}_\sigma(x_\sigma) \\ y = \mathfrak{Y}_\sigma(x_\sigma)}} \text{ ist,}$$

$$\frac{d\xi}{dx} \cdot dx = \left\{\frac{d\xi}{dx_\sigma}\right\}_{\substack{x = X_\sigma(x_\sigma, y_\sigma) \\ y = Y_\sigma(x_\sigma, y_\sigma)}} \cdot dx_\sigma;$$

Die Bezeichnung auf der rechten Seite dieser Gleichung ist so zu verstehen, dass die zunächst als Funktion von (x, y) vorgestellte Funktion ξ nach x_σ total differentiiert werde, erst nachdem sie vermöge des Systems (1) als Funktion von (x_σ, y_σ) ausgedrückt ist.

Soll nun unser Differential invariant sein, so muss

$$\left\{\frac{d\xi}{dx_\sigma}\right\}_{\substack{x = X_\sigma(x_\sigma, y_\sigma) \\ y = Y_\sigma(x_\sigma, y_\sigma)}} \equiv \left[\frac{d\xi}{dx}\right]_{\substack{x = x_\sigma \\ y = y_\sigma}}$$

sein, wobei mit der Bezeichnung auf der rechten Seite gemeint ist, dass man zuerst $\frac{d\xi}{dx}$ bilden, und dann rein formal x durch x_σ, y durch y_σ ersetzen soll; der Gebrauch verschiedenartiger Klammern hat den Zweck, die Verschiedenheit der durch die rechts unten beigefügten Gleichungen angedeuteten Substitutionen auf der linken und rechten Seite äusserlich zur Geltung zu bringen.

Nun hat man, um $\frac{d\xi}{dx}$ zu berechnen, auszugehen von den Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\delta R_{\lambda_0}(x, y)}{\delta x} + \frac{\delta R_{\lambda_0}(x, y)}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$0 = \frac{\delta f(x, y)}{\delta x} + \frac{\delta f(x, y)}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und findet so

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\delta(R_{\lambda_0}, f)}{\delta(x, y)} : \frac{\delta f}{\delta y}.$$

Der rein formale Prozess der Ersetzung von x, y bzw. durch x_σ, y_σ, den wir in dem ausgerechneten Ausdruck noch vorzunehmen haben, kann aber ebensowohl gleich am Anfang in den Ausdrücken R_{λ_0} und f vorgenommen werden, wenn dann auch die verschiedenen formalen Prozesse der Derivation, statt nach x und y, nach x_σ und y_σ erfolgen.

Der auf solche Weise erhaltene Ausdruck ist aber dank den simultanen Gleichungen:

$$\xi = R_{\lambda_0}(x, y) = R_{\lambda_0}(x_\sigma, y_\sigma)$$
$$0 = f(x, y) = f(x_\sigma, y_\sigma)$$

gerade der, welcher unter dem Symbol

$$\left\{\frac{d\xi}{dx_\sigma}\right\}_{\substack{x = X_\sigma(x_\sigma, y_\sigma) \\ y = Y_\sigma(x_\sigma, y_\sigma)}}$$

vorgestellt ist, w.z.b.

Wie weit es auf Grund dieser Sätze gelingt, reduzierbare Integrale zu finden, wenn man sich die algebraischen Gleichungen durch birationale Transformation in die Weierstresssche Normalform gebracht denkt, mag man aus einer merkwürdigen (wohl nicht durchweg einwandfreien) Arbeit von F. de Brun[1]) ersehen, in der besonders der Fall $\lambda = 3$; $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = 3$; $r = 2$ behandelt ist. —

Indem wir uns nun, im Interesse der Vollständigkeit, noch anderen Ueberlegungen zuwenden, die sich speziell auf elliptische und hyperelliptische Integrale beziehen, nehmen wir ein solches immer in der Form an:

$$J_{k,\,1,\,n}(x) = \int \frac{Z_k(x)}{N_1(x)\sqrt{R_n(x)}}\,dx,$$

wo die Indices die Grade der ganzen rationalen Funktion Z, N $R_n(x) \equiv \prod_{i=1}^{n}(x - c_i)$ bezeichnen; n werde im Folgenden stets, wie das dem allgemeinen Fall entspricht, als gerade Zahl angenommen.

Die allgemeinste algebraische (nicht rationale) Transformation wird dann durch eine algebraische Gleichung $T(x, \xi) \equiv \sum_{0}^{s} i \sum_{0}^{\alpha} {}_{o} t_{ik} x^i \xi^k = 0$ ermittelt. Sie führt jedoch, auf $J_{k,\,1,\,n}(x)$ angewendet, zu einem Integral von derselben Gestalt in ξ nur unter besonderen Bedingungen. Um diese zu finden, könnte man

1) Stockholm, Öfversigt Bd. 54, 1897.

folgendermassen verfahren: Nachdem dx durch $W(x, \xi)d\xi$ ersetzt ist, wäre die Funktion

$$\frac{Z_k^2(x)}{N_1^2(x) \cdot R_n(x)} \cdot W^2(x, \xi)$$

in dem durch $T(x, \xi) = 0$ bestimmten Funktionenkörper durch die Basis $1, x, \ldots . x^{s-1}$ darzustellen und hierauf die Koeffizienten von $x, \ldots x^{s-1}$ zu annullieren. Auf diesem, allerdings beschwerlichen Wege dürfte sich für jedes spezielle $J_{k, 1, n}(x)$ über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, durch eine so allgemeine Transformation auf ein anderes von gleichem Typus zu kommen, entscheiden, und gegebenenfalls eine nähere Determination der Grade s, t und der Koeffizienten t_{ik} erzielen lassen. Endlich wären die Bedingungen hinzuzufügen, damit das neue Integral $J_{k', 1', n'}(\xi)$ von niedrigerem Geschlechte ist: $n' < n - 2$.

Von grösserer Bedeutung sind unter den in der obigen allgemeinen Gestalt enthaltenen Transformationen nur die Fälle $s = 1$ und $t = 1$.

Nehmen wir für $s = 1$ noch den Koeffizienten von x gleich 1 an, die Transformation also in der Gestalt $x = g_t(\xi)$, so können wir leicht zeigen, dass Reduktion nicht allein dadurch herbeigeführt werden kann, dass $R_n(g_t(\xi))$ einen quadratischen Faktor von genügend hohem Grad erhält. Denn der grösste Faktor, den $R_n(g_t(\xi))$ und $\frac{dR_n(g_t(\xi))}{d\xi} = \left(\frac{dR_n(x)}{dx}\right)_{x = g_t(\xi)} \cdot g_t'(\xi)$ gemeinsam haben können, ist $g_t'(\xi)$ selbst, weil $R_n(x)$ und $R'_n(x)$, also auch $R_n(g_t(\xi))$ und $\left(\frac{dR_n(x)}{dx}\right)_{x = g_t(\xi)}$ ohne gemeinsamen Faktor vorauszusetzen sind. Wäre nun Reduktion auf die angegebene Weise möglich, so müsste jedenfalls

$$nt - 2(t - 1) \leq n, \text{ oder}$$
$$(n - 2)(t - 1) \leq 0$$

sein; nun ist aber sowohl $t \geq 1$, als auch $n \geq 2$. Wir sehen überdies, dass höchstens ein Polynom 2ten Grades durch eine ganze rationale Transformation höheren Grades (nach Absonderung quadratischer Faktoren) auf ein solches von gleichem Grade gebracht werden kann[1]).

Indem wir jetzt zu dem Fall $t = 1$ übergehen:

$$\xi = \frac{U(x)}{V(x)},$$

---

1) Das tritt für $n = 2$ in der Tat ein bei der Multiplikation beliebigen Grades der trigonometrischen Funktionen; z. B. ist $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\xi \frac{3d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ für $x = 3\xi - 4\xi^3$, und der bei der Transformation aus der Quadratwurzel heraustretende Faktor $(1 - 4\xi^2)$ ist in der Tat im wesentlichen gleich $\frac{dx}{d\xi}$.

können wir einen an die Tschirnhausentransformation erinnernden Weg zur Lösung der Reduktionsfrage skizzieren. Führt man nämlich für $R_n(x)$ die Bezeichnung y^2 ein, so kann man ξ und seine Potenzen bis zur n^{ten} als Quotienten zweier Polynome in y^2 schreiben, mit Koeffizienten, die Polynome in x höchstens vom $(n-1)^{ten}$ Grade sind. Multipliziert man nun mit den Nennern aus, reduziert durchweg auf 0 und ordnet in den n so erhaltenen Gleichungen nach Potenzen von x, so braucht man nur die Koeffizientendeterminante der linken Seiten gleich 0 zu setzen, um eine algebraische Gleichung $G(\xi, y^2) = 0$ zwischen ξ und y^2 zu bekommen; ferner kann man für $x, x^2 \ldots x^{n-1}$ und also auch für alle höheren Potenzen von x rational gebrochene Funktionen in ξ, y^2 gewinnen. Man ersieht dann nach kurzem Nachdenken, dass das transformierte Integral nur dann eine zweiblättrige Riemannsche Fläche besitzt, wenn $G(\xi, y^2) = 0$ in y^2 linear, und also y^2 gleich einer rational gebrochenen Funktion in ξ ist[1]); Reduktion tritt nur dann ein, wenn die Summe der im Zähler und Nenner dieser rationalen Funktion erscheinenden höchsten Ordnungszahlen die Zahl n — 2 nicht übersteigt.

Um jedoch in diesem Fall reduzierbare Integrale in fertiger Gestalt zu erhalten, geht man umgekehrt, wie das zuerst Königsberger[2]) getan zu haben scheint, von einem allgemeinen elliptischen oder hyperelliptischen Integral vom Geschlecht q aus, das man als das reduzierte betrachtet, und stellt dann, in Verallgemeinerung der aus den Fundamenta nova bekannten Methode Jacobis, die Bedingungen dafür auf, dass die Gleichung

$$[V(x)]^{2q+2} \cdot R_{2q+2}\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right) = \prod_{i=1}^{2q+2} (U(x) - c_i V(x)) = 0$$

insgesamt $(q+1)s - (p+1)$ Doppelwurzeln hat, und folglich im transformierten Integral ein Polynom $(2p+2)^{ten}$ Grades unter der Wurzel bleibt — unter s ist der Exponent der höchsten effektiv in $\frac{U(x)}{V(x)}$ auftretenden Potenz von x verstanden; eine 2ϱ-fache und $2\varrho+1$-fache Wurzel ist in diesem Zusammenhang ϱ Doppelwurzeln gleichwertig zu erachten. Für die ausgerechnete, in den Koeffizienten a_i, u_i, v_i von R_{2q+2}, U, V geschriebene Gleichung von $2(q+1)$ s^{ten} Grade fehlen dazu einfache Mittel ($s > 1$, $q > 1$ angenommen); wäre es aber damit auch besser bestellt, so würde es doch schwer halten, die gefundenen Bedingungsgleichungen dadurch identisch zu befriedigen, dass man jene Koeffizienten durch geeignete Funktionen von τ

1) Es stehen also notwendig nebeneinander: eine Gleichung, welche ξ rational durch x ausdrückt, und eine Gleichung, welche $R_n(x)$ rational durch ξ ausdrückt; die Transformation kann durch die eine oder die andere derselben definiert werden; überdies ist $\eta = H(x) \cdot y$, wo $H(x)$ eine ganze Funktion in x ist.

2) Journal für d. r. u. a. M., Bd. 85, 1878.

Parametern t_i, am liebsten also von Koeffizienten a_i oder u_i, v_i, ersetzt. Aus diesen Gründen ist man auf die Benützung der Wurzelwerte c_i und der Gleichungen $U - c_i V = 0$ angewiesen Man gewinnt dadurch zugleich einigen Einblick in die Vielfachheit der für einen bestimmten Komplex p, q, s auftretenden, als verschieden anzusehenden Typen. Da nämlich $U - c_i V = 0$ und $U - c_k V = 0$ offensichtlich keine Wurzeln gemeinsam haben können, wenn nur U und V relativ prim sind, so sind zunächst die Doppelwurzeln in der benötigten Anzahl $(q + 1)\, s - (p + 1)$ auf jene $2q+2$ Gleichungen zu verteilen, und es ist also vorab die diophantische Aufgabe zu lösen, alle (additiven) Zerfällungen dieser Zahl in $2q+2$ ganze Zahlen n_i zu finden, für die

$$0 \leqq n_i \leqq E\left(\frac{s}{2}\right)$$

gilt. Für die weitere Durchführung der Methode bieten sich auch nach dieser Modifikation noch Schwierigkeiten der angedeuteten Art dar.

Solche Rechnungen sind an Integralen erster Gattung[1]) durchgeführt für die Zahlen $p = 2$, $q = 1$ und $s = 2$: von Königsberger (Crelle, Bd. 85, 1878), $s = 3$: von Hermite (Bruxelles, Ann. Soc. scient. Bd. 1876) und Königsberger (l. c.), $s = 4$: von Bolza (Freiburg, Sitz.-Ber. 1885), $s = 5$: von Goursat (Bull. Soc. Math. de Fr. Bd. 13, 1885), der auch die anderen Fälle erledigt. Für $s = 3$ hat Burkhardt (Math. Annalen Bd. 36, 18) eine geometrische Deutung der Bedingungen gegeben, welchen alsdann die 6 Verzweigungswerte des reduzierbaren Integrals genügen müssen, indem er diese auf einem Kegelschnitt interpretiert, und Bolza hat daraufhin (Math. Annalen Bd. 50, 1898) diesen Fall in sehr eleganter Weise mit invariantentheoretischen Hilfsmitteln behandelt. Es muss hinzugefügt werden, dass man in den angegebenen einfachen Fällen zwar 1 reduzierbares hyperelliptisches Integral 1. Ordnung ohne viele Mühe erhält, dass dagegen das zweite Integral, welches nach dem eingangs erwähnten Satz jedenfalls existieren muss, zunächst unzugänglich bleibt In den Fällen $s = 3$ und $s = 4$ ergibt es sich hinterher auf Grund merkwürdiger Vertauschbarkeitseigenschaften, deren Vorhandensein nach dem oben über das allgemeine Reduktionsproblem der Abelschen Integrale Gesagten nicht gerade unerklärlich erscheint, ohne dass sich doch daraus ohne weiteres eine Substitution ableiten liesse, welche die hyperelliptische Gleichung in sich überführt.

1) Das transformierte, dem Ausgangsintegral gleiche Integral ist folglich ebenfalls erster Gattung; in der Tat ist wegen $U'V - UV' \equiv (U' - c_i V')\, V - (U - c_i V) V'$ jeder gemeinsame Teiler von $U - c_i V$ und $U' - c_i V'$, welcher vor das Wurzelzeichen in den Nenner tritt, auch ein Teiler des im Zähler stehenden Ausdrucks $U'V - UV'$, und verschwindet also aus dem Nenner (und Zähler).

Von grösserem Interesse als diese Rechnungen ist die von Goursat (l. c.) festgestellte Tatsache, dass p, q, s im allgemeinen nicht unabhängig von einander sind. Der Beweis ist kurz der folgende: Liegt irgend eine Gleichung $h_\pi(x) = 0$ vom Grade π vor, so ist

$$\Sigma(r-1) = 2\pi-2,$$

wo r die Multiplizität einer Wurzel von $h_\pi(x) = m$ bedeutet und die Summe über alle Werte von m, die mehrfache Wurzeln erzeugen, und über alle diese mehrfachen Wurzeln zu erstrecken ist [1]). Wenden wir diesen Satz auf unsere Gleichungen $\frac{U}{V} = c_i$ an, deren jede n_i Doppelwurzel hat, so ist

$$\Sigma(r-1) \leqq \sum_1^{2q+2} n_i ,$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn alle Doppelwurzeln nur Doppelwurzeln sind, und überdies mit den $2q+2$ Zahlen c_i die Gesamtheit jener Zahlen m als erschöpft anzusehen ist; folglich haben wir

$$\sum_1^{2q+2} n_i + \Delta = 2s-2; \quad \Delta \geqq 0$$

Auf der andern Seite ist

$$2\sum_1^{2q+2} n_i + 2p + 2 \equiv (2q + 2)s.$$

Dividiert man hierin mit 2 und setzt für Σn_i ein, so wird

$$2s - 2 - \Delta + p + = (q + 1)s,$$

$$p - 1 = (q - 1)s + \Delta,$$

und also

$$p - 1 \geqq s(q - 1),$$

weil $\Delta \geqq 0$ ist. Man zieht aus dieser Ungleichung ohne Mühe die folgenden schönen Schlüsse:

> Wird die Integrationsvariable ξ in einem hyperelliptischen Integral durch eine rationale Funktion in x ersetzt, so kann das transformierte Integral niemals von geringerem Geschlechte sein — womit ein oben gegebenes Resultat bestätigt und verallgemeinert ist. (Denn, da stets $s \geqq 1$, so ist stets $p \geqq q$.)

---

1) Ann. Éc. norm. sup. 3ième série, t. II, p. 40; man mag sich den Satz folgendermassen plausibel machen: Enthält eine Gleichung φ Parameter linear, so wird die gleich 0 gesetzte Diskriminante derselben, welche in den Koeffizienten vom Grade $2n-2$ ist, $2n-2$ Werte für diesen Parameter liefern, wenn er so bestimmt werden soll, dass die Gleichung mehrfache Wurzeln annimmt; im allgemeinen wird für einen solchen Parameterwert auch nur eine einzige Doppelwurzel erscheinen, so dass also $2n-2$ als $\Sigma(r-1)$ aufgefasst werden kann. Singulärere Fälle werden eine Folge davon sein, dass ein Parameterwert andere absorbiert.

Ein elliptisches Integral mag durch eine rationale Transformation beliebigen Grades in ein ebensolches transformiert werden können; ein hyperelliptisches dagegen kann nur linear in ein solches von gleichem Geschlechte transformiert werden.

Ein elliptisches Integral mag auf ein hyperelliptisches von gegebenem Geschlecht durch Transformationen beliebigen Grades gebracht werden; ein hyperelliptisches dagegen auf ein anderes (von höherem Geschlecht nur durch Transformationen, deren Grad eine feste Grenze nicht übersteigt.

Entsprechendes gilt für die Reduktion durch „rationale“ Transformationen.

Es kann noch hinzugefügt werden, dass bei der Transformation des elliptischen Integrals erster Gattung, wenn man das Produkt der Verzweigungspunkte in der normalen Form $\xi(\xi-1)(\xi-c)$ annimmt, die Zahl der im reduzierbaren Integral vorkommenden freien Parameter unabhängig von dem Geschlechte desselben und von der Ordnung der reduzierenden Transformation ist, nämlich $h+3$, wenn der Integrand an h Stellen verschwindet. Denn, sind s_1 und s_2 die effektiven Grade im Zähler und Nenner der transformierenden Substitution, so sind insgesamt, c eingerechnet, s_1+s_2+2 verfügbare wesentliche Konstanten vorhanden, und es müssen, weil der Zähler zunächst vom Grade s_1+s_2-1 wird, schliesslich aber vom Grade h werden soll, s_1+s_2-1-h Doppelwurzeln auftreten, was zu eben so vielen Bedingungen Anlass gibt; frei variabel bleiben folglich $h+3$ Konstante [1]). Von diesen kann man 3 dazu benützen, um durch Zusammensetzung der ursprünglichen mit einer den Grad nicht ändernden linearen Transformation dem transformierten Polynom unter der Wurzel die Normalform zu geben, welche dadurch charakterisiert ist, dass 3 der Verzweigungspunkte speziell in den Punkten 0, 1, ∞ liegen; es bleiben dann h wesentliche Parameter.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass manche der Bemerkungen im Vorstehenden eine leichte Verallgemeinerung auf beliebige binomische Integrale erlauben [2]).

---

1) Nach Königsberger (Crelle Bd. 85, 1878); nimmt man solche Abzählungen im allgemeinen Fall vor, wobei das Ausgangsdifferential erster Gattung vom Geschlechte q an h, Stellen verschwindend gedacht ist, so kann man gleichfalls auf einen Zusammenhang zwischen p, q, s kommen, nämlich: $(s-3)(q-1) < p$. Die Tragweite dieser Ungleichung ist aber geringer als die der Goursat'schen, und es lassen sich weniger gut Schlüsse daraus ziehen.

2) Was die Bestimmung des Geschlechts in diesem Fall betrifft, so mag auf einen Aufsatz von Dolbnia im Bulletin de Darboux (2) Bd. 19, 1895 hingewiesen werden.

Kehren wir nun zu dem zurück, was oben vom algebraischen Standpunkt aus über das Reduktionsproblem im allgemeinen festgestellt worden ist!

Wenn wir nur Gleichungen von hyperelliptischem Typus in Betracht ziehen, und nur solche, welche speziell birationale Substitutionen in sich zulassen, und wenn wir uns auf diejenigen zugehörigen reduzierbaren Integrale beschränken, welche solchen Substitutionen ihre Existenz verdanken, so sind jene Prinzipien zur vollständigen Lösung des Reduktionsproblems hinreichend.

Denkt man sich eine Gleichung von der beschriebenen Art zunächst durch birationale Transformation auf die Gestalt

$$y^2 = R_n(x); \quad n>4 \qquad (2)$$

gebracht, so muss diese Gleichung eine zur ursprünglichen isomorphe Gruppe birationaler Substitutionen gestatten, die insbesondere endlich ist, weil nach einem bekannten Satz von Weierstrass ein algebraisches Gebilde von höherem als dem ersten Geschlecht nur eine endliche Gruppe birationaler Transformationen in sich besitzen kann[1]. Nun können aber, weil es in dem zu (2) gehörigen Körper K (x, y) ausser den linear gebrochenen Funktionen von x keine anderen am Gebilde zweiwertigen gibt, die birationalen Transformationen der Gleichung (2) in eine gleichgestaltete, insbesondere also in sich selbst, nur diejenigen sein, bei denen ξ_0 eine linear gebrochene Funktion von x allein ist[2]; wir werden also, indem wir jetzt die Bezeichnungsweise wechseln, zu den endlichen Gruppen von Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{ax'+b}{cx'+d} \\ y &= \pm \frac{hy'}{(cx'+d)^{\frac{n}{2}}}\ ^{3}) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

hingeleitet, welche die Gleichung

$$y^2 = R_n(x) \qquad (2)$$

in sich überführen; diese sind ersichtlich hemiedrisch isomorph zu denjenigen wohlbekannten endlichen Gruppen von linear gebrochenen Substitutionen einer Variabeln, welche eine Gleichung $R_n(x) = 0$ in sich überführen[4]: unter h ist eine Konstante zu verstehen.

---

1) Vgl. z. B. Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen, Leipzig 1902 p. 501.

2) l. c. p. 533; zwei für birationale Transformationen äquivalente hyperelliptische Gleichungen haben also Polynome, die im gewöhnlichen Sinn der projektiven Invariantentheorie äquivalent sind.

3) Dies ist, wie leicht einzusehen, die spezielle Form der allgemeinen Substitution $y = F_1(x)y' + F_2(x)$, mit der man allein zu rechnen braucht.

4) Auch dann, wenn bei Ausübung einer Substitution die linke Seite einer Gleichung einen (konstanten oder nicht konstanten) Faktor annimmt, soll die Gleichung invariant für die Substitution heissen.

Anders liegt die Sache im elliptischen Fall, für $n = 4$; denn alsdann gestattet das Gebilde eine kontinuierliche Transformationsgruppe[1]), und es ist eine wesentliche Beschränkung, wenn wir auch in diesem Falle nur Gruppen von linear gebrochenen Substitutionen berücksichtigen; gleichwohl wollen wir sie aufrecht erhalten.

Sei nun $x = \frac{ax'+b}{cx'+d}$ eine lineare Substitution S, für welche die Gleichung $R_n(x) = 0$ invariant ist, was wir symbolisch durch $R_n S \equiv R_n = 0$ andeuten wollen. Für S bleiben zwei Punkte x_1 und x_2 der komplexen Zahlenebene fest, und man weiss, dass bei Einführung dieser Pole S in der Form geschrieben werden kann

$$\frac{x-x_1}{x-x_2} = \varepsilon \frac{x'-x_1}{x'-x_2} \quad (4),$$

in der ε eine primitive ν^{te} Einheitswurzel ist, unter ν die Ordnung von S verstanden, die endlich ist, weil die Gruppe endlich ist, zu der S gehört. Unter den mannigfachen Formen, die man der Substitution geben kann, soll diese die Normalform heissen: Sie bringt die zwei in der allgemeinsten linearen Substitution von endlicher Periode ν vorkommenden, frei beweglichen Parameter in einfachster Weise zur Geltung.

Führen wir jetzt in unsere Gleichung $R_n(x) = 0$ die neue Variable z vermöge

$$z = \frac{x-x_1}{x-x_2} \quad (5)$$

ein, so geht sie über in eine Gleichung $\overline{R}_n(z) = 0$, welche die Substitution $z = \varepsilon z'$ gestaltet, und folglich von der Form

$$z^{\nu_1} \Omega\left(z^{\nu}\right) = 0 \quad (6)$$
$$\left[\frac{n}{\nu}\right]$$

sein muss; hier ist unter $\left[\frac{n}{\nu}\right] \equiv \mu$ die grösste in $\frac{n}{\nu}$ enthaltene ganze Zahl, oder eine um eine ganze Zahl kleinere gemeint. Dabei ist darauf aufmerksam zu machen, dass sich so der Grad n der Gleichung $R_n(x) = 0$ erniedrigen lässt, wenn unter den Wurzeln von $R_n(x) = 0$ einer der beiden Pole jener Substitution (oder auch beide) einfach oder mehrfach vorkommt, indem man ihn zum Pol x_2 wählt.

---

1) Das wird geometrisch evident, wenn man von der Gleichungsform $y^2 = C(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$ ausgeht, auf der hiedurch gegebenen Kurve 3. Ordnung einen beliebigen Punkt O wählt und jedem Punkte P des Gebildes denjenigen P' zuordnet, welcher mit O und P in gerader Linie liegt; O ist dabei nicht ausgezeichnet; die ganze Transformationsgruppe entsteht, wenn O variiert; l. c. p. 537.

Die Anwendung auf die Gleichung (2) liegt am Tage. Indem man neben

$$z = \frac{x - x_1}{x - x_2} \quad (5)$$

eine neue Variable

$$u = \frac{ky}{(z-1)^{\frac{n}{2}}} \quad (5')$$

einführt, erhält man eine neue Gleichung

$$u^2 = z^{\nu_1} \mathfrak{Q}_\mu (z^\nu) \quad (2'),$$

welche die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} z &= \varepsilon z' \\ u &= \pm \varepsilon^{\frac{\nu_1}{2}} u' \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

mit $\varepsilon^\nu = 1$ gestattet. Das Symbol ν_1 stellt hier eine der beiden Zahlen 0 und 1 vor, weil $R_n(x)$ als frei von Doppelwurzeln anzusehen ist[1]).

Nach diesen Vorbereitungen erlaubt die Frage nach den — innerhalb der festgesteckten Grenzen — allgemeinsten Typen reduzierbarer Integrale, welche zur Gleichung (2) gehören, eine geradezu triviale, aber vollständige Erledigung.

Nehmen wir nämlich vorübergehend an, dass die Gleichung (2) nur die beiden in dem Schema (3) enthaltenen periodischen Substitutionen zulässt, so müssen die (2') reduzierenden Substitutionen ξ, η absolut invariant sein für eine der beiden unter (3') enthaltenen Substitutionen; sie sind also jedenfalls von der Form

$$\begin{aligned} \xi &= z^\varkappa \mathfrak{F}_1(z^\nu) u + \mathfrak{F}_2(z^\nu) \\ \eta &= z^\varkappa \mathfrak{H}_1(z^\nu) u + \mathfrak{H}_2(z^\nu), \end{aligned}$$

mit der Bedingung, dass

$$\varkappa + \frac{\nu_1}{2} = \frac{\nu}{2} \quad (7a)$$

oder um ein Vielfaches von ν davon verschieden sei, und dass also

$$2\varkappa + \nu_1 \equiv 0 \pmod{\nu} \quad (7).$$

Wir finden uns berechtigt, in (7a) rechts $\frac{\nu}{2}$ anzusetzen, und nicht, wie es auf den ersten Anblick als notwendig erscheinen könnte, ν, weil $\varepsilon^{\frac{\nu}{2}} = \pm 1$ ist, und, falls $\varkappa + \frac{\nu_1}{2}$ als Exponent

---

1) Aus dem gleichen Grunde ist hier $\mu = \left[\frac{n}{\nu}\right] = E\left(\frac{n}{\nu}\right)$ für $\nu \geqq 3$, und kann nur für $\nu = 2$ zu $\frac{n}{2} - 1$ werden.

von ε zum Werte —1 führen sollte, die erforderliche absolute Invarianz von ξ und η dadurch bewirkt werden kann, dass man von den beiden in (3′) enthaltenen Substitutionen nur die dem negativen Vorzeichen entsprechende berücksichtigt. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ sind Zeichen für rationale Funktionen.

Die durch ξ, η vermittelte Transformation lässt sich aber zusammensetzen aus der Transformation

$$\left.\begin{aligned} t &= z^{\nu} \\ w &= z^{\varkappa} u \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

und einer weiteren rationalen Transformation. Wir werden aber sogleich beweisen, dass, von einer unbeträchtlichen Ausnahme abgesehen, bereits die Transformation (8) in allen Fällen Reduktion zur Folge hat. Soll dann das reduzierte Integral weiterer Reduktion fähig sein, so muss die neue zu Grunde liegende, hyperelliptischen Typus aufweisende, Gleichung zwischen w und t abermals wenigstens 1 „lineare“ Substitution in sich zulassen, und das anzuwendende Verfahren bleibt das gleiche.

Zu dem angekündigten Beweis müssen wir das allgemeinste für eine der Substitutionen (3′) absolut invariante Differential bilden. Dasselbe hat ersichtlich die Form

$$\frac{z^{\lambda}\Phi(z^{\nu})}{u}\,dz \quad (9),$$

mit der Bedingung, dass $\lambda + 1 - \frac{\nu_1}{2} = \frac{\nu}{2}$ oder um ein Vielfaches von ν davon verschieden so, oder auch, dass

$$2\lambda - \nu_1 + 2 \equiv 0 \pmod{\nu} \quad (10).$$

Nehmen wir nun also in (9) die Transformation (8) vor, so verwandelt es sich in

$$\frac{t^{\frac{\varkappa+\lambda+1}{\nu}}\Phi(t)}{\nu t \,.\, w}\,dt,$$

wobei, wie durch Addition der Kongruenzen (7) und (10) folgt, jedenfalls für $\tau = \varkappa + \lambda + 1$ die Kongruenz gilt

$$2\tau \equiv 0 \pmod{\nu}.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass schon $\tau \equiv 0 \pmod{\nu}$, d. h. der Exponent $\frac{\tau}{\nu}$ eine ganze Zahl sein muss. Denn ist erstens ν eine gerade Zahl, so haben die Kongruenzen (7) und (10) gleicherweise nur dann ganzzahlige Lösungen $\varkappa$, λ, — wie erforderlich ist —, wenn auch ν_1 eine gerade Zahl ist, d. h. gleich 0 ist. Die Kongruenzen ergeben dann: $\varkappa \equiv 0$ oder $\equiv \frac{\nu}{2}$ (mod. ν), $\lambda \equiv -1$ oder $\equiv -1 + \frac{\nu}{2}$ (mod. ν.) Von diesen

Werten für $\varkappa$ und λ können jedoch nur die an gleicher Stelle stehenden kombiniert sein; denn ein Differential mit $\lambda \equiv -1$ ist nur für die erste, dem positiven Zeichen entsprechende Substitution von (3') invariant, ein Differential mit $\lambda \equiv 1 + \frac{\nu}{2}$ nur für die zweite, dem negativen Zeichen entsprechende, und die reduzierenden Substitutionen ξ, η müssen für die jeweils mögliche Suhstitution invariant sein. Mit Berücksichtigung dessen ergibt sich beidemale $\tau = 0 \pmod{\nu}$. Ist zweitens ν eine ungerade Zahl, so kann $\nu_1 = 0$ oder $= 1$ sein. Wenn wir zunächst $\nu_1 = 1$ annehmen, so genügen $\varkappa$ und λ ein und derselben Kongruenz $2\varrho + 1 \equiv 0 \pmod{\nu}$ mit nur 1 Lösung, und also wird $\tau \equiv 2\varkappa + 1 \equiv 0 \pmod{\nu}$. Nehmen wir aber $\nu_1 = 0$, so wird $\varkappa \equiv 0$, $\lambda \equiv \nu - 1$, und also $\tau = \nu$.

Nach alledem bleibt nur übrig, zu zeigen, dass die Gleichung zwischen w und t von niedrigerem Geschlecht ist, als die Gleichung (2') zwischen u und z. Nun ist

$$w^2 = z^{2\varkappa+\nu_1}\mathfrak{Q}_\mu(z^\nu),$$

oder, da $\frac{2\varkappa+\nu_1}{\nu}$ für gerades ν und Invarianz des Differentials gegenüber der ersten Substitution, sowie für ungerades ν und $\nu_1 = 0$, gleich 0, in den anderen 2 Fällen aber gleich 1 ist, entweder

$$\left.\begin{aligned} w^2 &= \mathfrak{Q}_\mu(t), \text{ oder} \\ w^2 &= t\mathfrak{Q}_\mu(t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(11a) \\ &(11b) \end{aligned}$$

Reduktion ist also im Falle (11a) erzielt, wenn

$$\mu \leqq \mu\nu - 2 \ (\nu_1 = 0!), \text{ oder}$$
$$2 \leqq \mu(\nu - 1)$$

ist. Das tritt, aber, weil $\mu \geqq 1$, stets ein, wenn $\nu \geqq 3$, und für $\mu \geqq 2$ auch im Falle $\nu = 2$; und das sind alle bei (11a) in Betracht kommenden Fälle. Für (11b) muss bei ungeradem ν (mit $\nu_1 = 1$)

$$\mu + 1 \leqq \mu\nu - 1, \ 2 \leqq \mu(\nu - 1)$$

sein und das trifft stets zu, weil ja nach Annahme $\nu \geqq 3$ ist. Ist aber in diesem Fall ν gerade, also $\nu_1 = 0$, so muss

$$\mu + 1 \leqq \mu\nu - 2, \text{ oder}$$
$$3 \leqq \mu \ (\nu - 1)$$

sein; dazu ist nötig, dass entweder $\nu \geqq 4$, oder $\mu \geqq 3$ ist. Die einzige, oben erwähnte, Ausnahme liefert also der Fall (11b) für $\mu = 2$, $\nu = 2$. Da im zugehörigen Integral $\lambda \equiv 0$, $\nu_1 = 0$ sein muss, so lautet es

$$\int \frac{\Phi(z^2)}{u}\, dz \text{ mit } u^2 = \mathfrak{Q}_2(z^2);$$

es gestattet die Substitution $z = -z'$, $u = -u'$, ohne durch $t = z^2$, $w =$ zu reduzierbar zu sein; im übrigen ist der Fall trivial. —

Nach dem Vorstehenden gewinnen wir, unter der Annahme, dass die rechte Seite der Gleichung (2): $y^2 = R_n(x)$ nur die Substitution S mit den Polen x_1 und x_2 und von der Ordnung ν zulässt, und unter der weiteren Annahme, dass (2) bei Einführung von z vermöge (5) äquivalent wird mit der Gleichung (2'): $u^2 = z^{\nu_1}\Omega_{\left[\frac{n}{\nu}\right]}(z^\nu)$, das allgemeinste zur Gleichung (2) gehörige reduzierbare Integral in der Form

$$\int \frac{\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^\lambda \Phi\left[\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^\nu\right]}{\sqrt{\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^{\nu_1}\Omega_{\left[\frac{n}{\nu}\right]}\left[\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^\nu\right]}}$$

mit der Bedingung $2\lambda - \nu_1 + 2 \equiv 0 \pmod{\nu}$.

Gestattet dagegen die Gleichung (2) ausser S noch andere periodische „lineare" Substitutionen, so benützen wir diese in analoger Weise, um ihr reduzierbare Integrale zu adjungieren. Sind alle in der endlichen Gruppe der Gleichung vorhandenen Cyclen erschöpfend herangezogen, so ist auf solche Weise der ganze Reichtum der zu der gegebenen Gleichung gehörigen reduzierbaren Integrale erschöpft. Indem man die verschiedenen ihr adjungierten Typen addiert, erhält man das allgemeinste zugehörige, auf ein Aggregat von Integralen niedrigeren Geschlechtes reduzierbare Integral. Diesen Integraltypus denken wir uns noch einer allgemeinen birationalen Transformation unterworfen.

Da überdies die endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen und die allgemeinsten dafür invarianten Gleichungen wohl bekannt sind [1]), so lassen sich also aus allen überhaupt existierenden Klassen Abelscher Integrale von hyperelliptischem Charakter Repräsentanten für die allgemeinsten, nicht äquivalenten reduzierbaren Integrale aufstellen, welche Gruppen von birationalen Transformationen des Gebildes in sich ihre Existenz verdanken; und damit ist, unter den adoptierten beschränkenden Voraussetzungen, der zweite Teil des eingangs gestellten Problems vollständig erledigt.

Auch für den ersten Teil ist damit natürlich implicit eine Lösung gegeben. Denn nachdem die Gruppe linearer Substitu-

1) Vgl. hiewegen für das Folgende die Vorlesungen über das Ikosaeder von F. Klein, Leipzig 1884; oder die mehr algebraische Darstellung im 2. Bande des Lehrbuchs der Algebra von H. Weber, Braunschweig 1899. (2. Aufl.)

tionen festgestellt ist, welche die dem gegebenen Integral zu Grunde liegende hyperelliptische (oder elliptische) Gleichung gestatten muss, wenn Reduktion möglich sein soll, lässt sich die gegebene rationale Funktion $\frac{Z_k(x)}{N_l(x)}$ nur mit einer endlichen Anzahl spezieller, unter der allgemeinsten Form der zur Gleichung gehörigen reduzierbaren Integrale enthaltener Funktionentypen identifizieren. Die Gleichsetzung einer genügenden Anzahl entsprechender Koeffizienten in den beiden Funktionen ermöglicht dann die Bestimmung der noch freien Parameter, unddie Gleichheit oder teilweise, bez. durchgängige Ungleichheit der übrigen entsprechenden Koeffizienten für eines resp. alle der so bestimmten, in endlicher Anzahl vorhandenen Systeme von Parameterwerten entscheidet über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Reduktion.

Indessen kann nicht geleugnet werden, dass damit nicht alle Wünsche erfüllt sind. Man überblickt nämlich leicht, dass jedenfalls bei der Reduktion auf ein einzelnes Integral für irgend eine Kombination von Gradzahlen k, l, n die im reduzierbaren Integrale vorkommenden rationalen, ganzen Funktionen Z_k, N_l, R_n, als binäre Formen betrachtet, durch kovariante Relationen ausgezeichnet, und ebenso durch simultane kovariante Beziehungen verknüpft sein müssen; denn jede von ihnen lässt sich, wie wir wissen, durch lineare Transformation in eine angebbare kanonische Gestalt bringen, und das muss durch simultane Transformation zu erreichen sein; es entsteht sohin der Wunsch, die Reduktionsbedingungen, wenigstens in den einfachsten Fällen, in kovarianter Gestalt zu ermitteln. Nun ist es zwar leicht, zur Herstellung der Bedingungen erster Art eine allgemeine Methode zu beschreiben, praktisch durchführbar ist sie aber nicht ohne weiteres; — für die Bedingungen zweiter Art scheint es auch daran zu fehlen. Man müsste nämlich, um für jede der 3 Funktionen die Bedingungen der ersten Art zu finden, von der homogen gemachten Funktion, also etwa Z_k ausgehen, hierin eine Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ vornehmen und die zu erfüllenden Koeffizientenbedingungen (bestehend im Verschwinden gewisser derselben) in den neuen Koeffizienten schreiben. Die Elimination von α, β, γ, δ würde dann eine Reihe von Gleichungen zwischen den ursprünglichen Koeffizienten ergeben; diese wären darauf durch die Kovarianten der typischen Darstellung zu ersetzen, und die gewonnenen Bedingungen weiterhin umzugestalten und gegebenenfalls zu reduzieren. Um die simultanen Bedingungen zu finden, kann man dagegen nicht etwa mit $R_n + \lambda_1 Z_k + \lambda_2 N_l$ analog verfahren (die erhaltenen Gleichungen als in λ_1, λ_2 identische auffassend), weil man nicht ohne weiteres

annehmen darf, dass R_n, Z_k, N_l gleichzeitig auf die typische Gestalt (im Sinne von Clebsch) gebracht werden können [1]).

Wir wollen nicht unterlassen, noch eine Ueberlegung mitzuteilen, welche auf die Reduzierbarkeit unserer invarianten Integrale nach den eingangs dargelegten Prinzipien hindeutet, uns dabei aber der Einfachheit halber auf Integrale mit nur, cyklischen, ohne polare Perioden beschränken. Bekanntlich lassen sich die 2p Perioden erster und zweiter Art eines hyperelliptischen Integrals als Aggregate von Integralen ausdrücken, die zwischen je zweien der Verzweigungspunkte erstreckt sind, und man überzeugt sich leicht, dass auch 2p dieser Integrale selbst, je doppelt genommen, zu Perioden gewählt werden können. Führt man nun in unserem speziellen Fall eine der Substitutionen aus, für welche das Differential invariant ist, so wird jedes der 2p, zwischen je 2 Verzweigungspunkten erstreckten Periodenintegrale sich als gleich erweisen mit je einem andern, zwischen 2 anderen Verzweigungspunkten erstreckten, weil sich ja die Verzweigungspunkte dabei unter sich permutieren. Nun kann jedes der 2p neuen Integrale aufgefasst werden als eine bei anderer Zerschneidung der Riemannschen Fläche auftretende Periode (die Zerschneidung darf dabei für jedes derselben in anderer Weise abgeändert sein); und da, bei veränderter Zerschneidung die neuen Perioden durch (unimoduläre) lineare Substitutionen mit ganzzahligen, nur von den Zerschneidungsarten abhängigen Koeffizienten aus den alten hervorgehen, so finden wir also schliesslich jedes der 2p anfänglichen Integrale gleich einem linearen Ausdruck in diesen selben Integralen mit ganzzahligen Koeffizienten. Die so erhaltenen 2p homogenen Gleichungen werden im allgemeinen nicht unabhängig von einander sein; nach Weglassung der entbehrlichen werden $2p-\sigma$ von einander unabhängige übrig bleiben, und man erkennt, dass sich die 2p Perioden mit ganzen Koeffizienten aus σ Zahlen zusammensetzen lassen, nämlich aus den k^{teln} von σ bestimmten der Perioden selbst, unter k eine gewisse, genügend grosse, ganze Zahl verstanden; durch Hinzunahme der 0 kann man, eventuell, das System jener Zahlen so erweitern, dass es eine gerade Anzahl σ von Zahlen enthält. Zur Vervollständigung dieser Ueberlegung bedürfte es nicht nur einer genaueren Determination der Zahl σ, sondern auch des Nachweises, dass sich aus den reellen und imaginären Teilen jener σ Perioden ein bilinearer Ausdruck von der bekannten Form herstellen lässt, welcher positiv ist. Es verdient ausserdem hervorgehoben zu werden, dass, wie der Rückblick auf die gegebene Herleitung lehrt, für 2 Integrale mit denselben Zahlen n, ν, ν_1 bei homologer Wahl

1) Im Falle n = 6 hat Bolza wenigstens für R_6 die Bedingungen vollständig angegeben: Amer. Journal of Math. Bd. 10, 1888; Bericht hierüber: Math. Annalen 30, 1887; schon vorher z. T. bei Clebsch und Maisano.

der Perioden die Koeffizienten der Zusammensetzung die gleichen sind[1]).

Bevor wir nun in spezielle Rechnungen eintreten, müssen wir noch bemerken, dass die abzuleitenden Resultate sich z. T. mit solchen berühren, die Goursat in einem Aufsatz im 15. Bande des Bulletin de la Société Mathématique de France gegeben hat, dessen Lektüre die Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit gewesen ist, und auf den darum hier besonders hingewiesen sei. —

Unter den Gleichungen, welche nur eine einzige Substitution zulassen, sind die wichtigsten diejenigen mit einer involutorischen[2]): $\nu = 2$. Es ist dann notwendig $\nu_1 = 0$, λ aber kann ausser für $n = 4$ sowohl 0 als 1 sein; das allgemeinste hieher gehörige Integral ist also stets auf eine Summe von 2 Integralen reduzierbar.

Man kann in diesem Fall das allgemeine auf nur 1 Integral reduzierbare Integral auch in anderer und scheinbar allgemeinerer Gestalt darstellen, indem man in einem beliebigen Integral $\int \frac{f(t)}{\sqrt{R_\mu(t)}}\,dt$ für t irgend eine gebrochene rationale Funktion zweiten Grades: $\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}$ einsetzt. Dass das Polynom unter der Wurzel im neuen Integral eine involutorische Substitution gestatten muss, folgt für die geometrische Auffassung daraus, dass die Wurzelpunkte von $R_\mu(t) = 0$ und $(b_0x^2+b_1x+b_2)^\mu \cdot R_\mu\left(\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}\right) = 0$ in einzweideutiger Korrespondenz stehen. Dass das erhaltene Integral aber nicht allgemeiner ist, als das oben gefundene, folgt aus der Tatsache, dass zwei quadratische Formen durch Uebergang zu neuen Variabeln simultan auf die kanonische Gestalt der Summe zweier Quadrate gebracht werden können; denn man kann aus diesem Grunde, wenn man x noch einer linearen Transformation unterzieht, den obigen Bruch auch in der Gestalt schreiben $\frac{a(X-X_1)^2+b(X-X_2)^2}{c(X-X_1)^2+d(X-X_2)^2}$, und sieht nun, dass die durch ihn vermittelte Transformation zusammengesetzt werden kann aus einer linearen Transformation

1) Man überträgt ohne Schwierigkeit diesen Gedankengang auf den allgemeinen Fall von beliebigen, nicht nur hyperelliptischen, Gebilden mit eindeutigen Transformationen in sich. Denn es ist klar, dass dabei Verzweigungspunkte wieder in solche übergehen müssen; andererseits lässt sich der Zusammenhang einer allgemeinen Riemannschen Fläche im wesentlichen auf den einer hyperelliptischen zurückführen.

2) In diesem Fall erkennt man sofort, dass $p+1$ Perioden verschwinden müssen, indem man zu Integralgrenzen jeweils zwei zugeordnete Verzweigungspunkte wählt!

$\frac{aZ+b}{cZ+d} = t$ des Differentials $\frac{f(t)}{\sqrt{R_\mu(t)}}dt$, welche seine Allgemeinheit nicht steigert, und aus der Transformation $Z = \left(\frac{X-X_1}{X-X_2}\right)^2$, welche uns wohlbekannt ist.

Es ist nicht ohne Interesse, sich durch wirkliche Ausführung der involutorischen Substitution von der absoluten Invarianz des transformierten Integrals zu überzeugen[1]). Man erhält die involutorische Substitution S, indem man, unter x_1, x_2 die Wurzeln von $t = \frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}$ verstanden, für x_1+x_2 und $x_1 . x_2$ ihre Ausdrücke in t anschreibt und t eliminiert, in der Gestalt

$$Lx_1x_2 - M(x_1+x_2) + N = 0$$

mit $L = a_0b_1 - a_1b_0$, $N = a_1b_2 - a_2b_1$, $M = a_2b_0 - a_0b_2$, oder aufgelöst:

$$x_1 = \frac{Mx_2-N}{Lx_2-M} \quad (12).$$

Ist andrerseits $\int \frac{\mathfrak{F}(x)}{+\sqrt{R_n(x)}}dz$ das reduzierbare Integral, so findet sich durch elementare Rechnung, wenn $R_n(x) =$

$(b_0x^2+b_1+b_2)^2 . E\left(\frac{\mu+1}{2}\right) R_\mu\left(\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}\right)$ ist, $\mathfrak{F}(x) =$

$f\left(\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}\right) . (Lx^2-2Mx+N) . (b_0x^2+b_1x+b_2) E\left(\frac{\mu+1}{2}\right)-2.$

Betrachten wir nun also hier x als x_1, und üben die Substitution (12) aus, so setzt sich der neue Integrand zusammen mit Hilfe der durch direkte Rechnung zu beweisenden Formeln:

$$a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 \equiv (M^2-LN)\frac{a_0x_2^2+a_1x_2+a_2}{(Lx_2-M)^2},$$

$$b_0x_1^2 + b_1x_1 + b_2 \equiv (M^2-LN)\frac{b_0x_2^2+b_1x_2+b_2}{(Lx_2-M)^2},$$

$$Lx_1^2 - 2Mx_1 + N \equiv -(M^2-LN)\frac{Lx_2^2-2Mx_2+N}{(Lx_2-M)^2}$$

$$dx_1 \equiv -(M^2-LN)\frac{dx_2}{(Lx_2-M)^2}$$

und durch Einsetzen ergibt sich die behauptete Invarianz unmittelbar. —

---

1) Die Rechnung ist, mit Berichtigung einer Inkorrektheit, die Verallgemeinerung der von Goursat, l. c., für $\mu = 2$ gegebene.

Eine andere Form der involutorischen Gleichungen ist die folgende[1]):

$$y^2 = x(x-1)(x-c_1) \ldots (x-c_{2p-1})$$

mit den p Bedingungen $c_1 = c_k\, c_{2p-k+1}$, $2 \leqq k \leqq p$, so dass also ausser c_1 noch $p-1$ andere Parameter vorkommen; sie gestattet die beiden involutorischen Substitutionen

$$x = \frac{c_1}{x'}, \quad y = \pm \frac{c_1^{\frac{p+1}{2}}}{x'^{p+1}} \cdot y'.$$

Der berühmteste, unter (13) enthaltene Fall ist der Fall $p = 2$. Jacobi ist auf ihn bei Verallgemeinerung eines von Legendre im 3ten Supplement seines Traité gegebenen ersten Beispiels von Reduktion eines hyperelliptischen Integrals gekommen und hat ihn in seiner Anzeige dieses Supplements im 8. Bande von Crelles Journal mitgeteilt. Er ist sehr lange der einzige bekannte geblieben und seitdem von verschiedenen Gesichtspunkten aus durch viele Autoren behandelt worden[2]). Unserm Schema fügt er sich zwanglos ein. Adoptieren wir die übliche Bezeichnungsweise $c_1 = \varkappa\lambda$, $c_2 = \varkappa$, $c_3 = \lambda$, so haben wir also zuerst die Variable

$$z = \frac{x + \sqrt{\varkappa\lambda}}{x - \sqrt{\varkappa\lambda}}, \text{ oder } x = \sqrt{\varkappa\lambda}\,\frac{z+1}{z-1}, \text{ einzuführen, weil die Sub-}$$

stitution $x = \frac{\varkappa\lambda}{x'}$ die Normalform $\frac{x + \sqrt{\varkappa\lambda}}{x - \sqrt{\varkappa\lambda}} = -\frac{x' + \sqrt{\varkappa\lambda}}{x' - \sqrt{\varkappa\lambda}}$ besitzt. Aus

$$x(x-1)(x-\varkappa\lambda)(x-\varkappa)(x-\lambda)$$

wird so

$$\frac{1}{(z-1)^6} \cdot \sqrt{\varkappa^3\lambda^3}(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})^2(1-\sqrt{\varkappa\lambda})^2(z^2-1) \times$$

$$\left(z^2-\left(\frac{\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda}}\right)^2\right)\left(z^2-\left(\frac{1+\sqrt{\varkappa\lambda}}{1-\sqrt{\varkappa\lambda}}\right)^2\right) = \mathfrak{Q}_3(z^2) : (z-1)^6$$

Die beiden einfachsten der zugehörigen reduzierbaren Integrale, nämlich

---

1) In dieser Form in Aufsätzen von J. Malet, Crelle 76, 1873 (On the reduction etc.) und F. de Brun, Oefversigt Stockholm, Bd. 34, 1897 (Om invarianta hyperelliptiska likheter.)

2) Auf dem eingangs geschilderten transzendenten Wege wird aus der gefundenen Doppelverhältnisgleichung $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_5\alpha_6)$ für die 6 Verzweigungspunkte der Jacobische Fall als der einzige (bei rationaler Transformation) existierende für $p = 2$, $q = 1$, $s = 2$ erkannt; nach dem, was oben über die Zusammensetzbarkeit der durch eine gebrochene rationale Funktion 2ten Grades vermittelten Transformation gesagt wurde, ist das verständlich. Für die Behandlung nach der verallgemeinerten Jacobischen Transformationsmethode sei besonders auf das letzte Kapitel des oben zitierten Krazerschen Werkes verwiesen.

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{Q_3(z^2)}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{\sqrt{Q_3(z^2)}}$$

werden bei Wiedereinführung von x zu

$$-\int \frac{(x+\sqrt{\varkappa\lambda})\,dx}{4\varkappa\lambda\sqrt{x(x-1)(x-\varkappa\lambda)(x-\varkappa)(x-\lambda)}} \quad \text{und}$$

$$-\int \frac{(x-\sqrt{\varkappa\lambda})\,dz}{4\varkappa\lambda\sqrt{x(x-1)(x-\varkappa\lambda)(x-\varkappa)(x-\lambda)}};$$

die reduzierten Integrale

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{Q_3(t)}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{tQ_3(t)}}, \text{ dh.}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(\varkappa\lambda)^{3/4}(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})(1-\sqrt{\varkappa\lambda})\sqrt{(t-1)\left(t-\left(\frac{\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda}}\right)^2\right)\left(t-\left(\frac{1+\sqrt{\varkappa\lambda}}{1-\sqrt{\varkappa\lambda}}\right)^2\right)}}$$

und ein entsprechendes, werden vermittelst einer und derselben Substitution $t = z^2 = \left(\frac{x+\sqrt{\varkappa\lambda}}{x-\sqrt{\varkappa\lambda}}\right)^2$ gewonnen.

Daraus folgt dann sofort, dass jedes Integral

$$\int \frac{(ax+b)}{\sqrt{x(x-1)(x-\varkappa\lambda)(x-\varkappa)(x-\lambda)}}\,dz,$$

insbesondere also die beiden Integrale mit $a = 0$, bez. $b = 0$, auf die Summe zweier elliptischer Integrale reduziert werden kann.

Wird dann speziell $\lambda = -1$ genommen, so ergibt sich das von Legendre herrührende erste Beispiel eines reduzierbaren Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)(x^2-\varkappa^2)}}$$

und das von Jacobi hinzugefügte

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x^2-1)(x^2-\varkappa^2)}}.$$

Dieser Legendresche Fall ist jedoch wesentlich spezieller als der Jacobische, weil die Gleichung

$$y^2 = x(x^2-1)(x^2-\varkappa^2) \quad (13)$$

nicht nur die Substitutionen $x = \frac{-\varkappa}{x'}$, $y = \pm \frac{i\sqrt{\varkappa^3}}{x'^3}y'$ gestattet, sondern auch

$$x = -x', \; y = \pm iy' \quad (14)$$

und

$$x = \frac{\varkappa}{x'}, \; y = \pm \frac{\sqrt{\varkappa^3}}{x'^3}y' \quad (15)$$

welche mit $x = x'$, $y = \pm y'$ zusammen eine zur Vierergruppe isomorphe Gruppe bilden. Auf Grund von (14) lässt sich der Gleichung kein reduzierbares Integral adjungieren; hingegen hat die Existenz der Substitution (15) zur Folge, dass, wie leicht zu überblicken ist, jedes Integral

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{x(x^2-1)(x^2-\varkappa^2)}}\,dx$$

auf zwei Arten in einer Summe zweier elliptischer zerlegt werden kann.

Es sei noch bemerkt, dass, unter Anwendung der Bezeichnungen von Clebsch, eine Form 6ter Ordnung den Jacobischen Fall repräsentiert, wenn $R = 0$, $An\,A_{mm} - A^2_{lm} \gtrless 0$, und den Legendreschen, wenn $4B^3 + 5ABC + 6C^2 - 3AD = 0$, $3AB^2 - 6BC + 4A^2C - 18D = 0$, $D \gtrless 0$, $6C^2 - B^3 \gtrless 0$ [1]).

Eine ausgezeichnete Stellung nehmen für unsere Betrachtungsweise die elliptischen Integrale ein, insofern die allgemeine Gleichung 4ten Grades stets eine Diedergruppe, die Vierergruppe, gestattet. Dies wird nach dem eben Gesagten am einfachsten erkannt, wenn man bedenkt, dass jede Gleichung vierten Grades linear auf die Gestalt $(x^2-1)(x^2-\varkappa^2)$ gebracht werden kann. Um allgemeiner zu sprechen, so ist bekannt, dass eine Form 4ten Grades die Gestalt $\xi_1^4 + 6m\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4$ annimmt, wenn man die linearen Faktoren ξ_1, ξ_2 eines der 3 ausgezeichneten, gewöhnlich mit φ, ψ, χ benannten quadratischen Faktoren ihrer Kovariante T einführt; jene Form ist aber identisch mit der zur Vierergruppe in ihrer gewöhnlichen Gestalt gehörigen invarianten Form $(z_1^2 - z_2^2)^2 + 4\mu z_1^2 z_2^2$. Aus der in der Jacobischen Theorie zu Grunde gelegten Gleichungsform $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ geht die hier benötigte hervor, indem $\sqrt{k}\cdot x = x'$ gesetzt wird.

Man erhält die Vierergruppe, welche eine Gleichung

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

zulässt, am einfachsten, indem man auf die drei möglichen Arten die vier Wurzeln in zwei Paare zusammenfasst, welche eine Involution bestimmen, z. B. α, β; γ, δ, und die in der allgemeinsten involutorischen Substitution

$$x = \frac{x' + A}{Bx' - 1}$$

verfügbaren zwei Konstanten aus den 2 Bedingungen bestimmt, dass der Punkt $x = \alpha$ in den Punkt $x' = \beta$, und der Punkt

---

1) Entnommen der Tabelle von Bolza, Mathem. Annalen 30, p. 549. — Es ist $A = (ff)_6$, $i = (ff)_4$, $B = (ii)_4 = i_4$, $C = (ii')^2(i'i'')^2(i''i)^2 = j_6$, $l = (fi)_4$, $m = (li)_2$, $n = (mi)_2$, $D = (ln)^2$, $R = -(lm)(mn)(nl)$. Die quadratischen Kovarianten, deren Wurzelpunkte einzuführen sind, wenn die Gruppen die Kleinschen Normalformen haben sollen, sind $(lm)\,l_x\,m_x$ im ersten, l im zweiten Fall.

$x = \gamma$ in den Punkt $x' = \delta$ übergeführt werden. Die Ausrechnung ergibt

$$x = \frac{(\alpha\beta - \gamma\delta)x' + ((\alpha + \beta)\gamma\delta - (\gamma + \delta)\alpha\beta)}{((\alpha + \beta) - (\gamma + \delta))x' - (\alpha\beta - \gamma\delta)};$$

die beiden anderen Substitutionen gehen daraus durch die Vertauschungen $(\beta\gamma)$ und $(\beta\delta)$ hervor.

Die drei Substitutionen mögen S_1, S_2, S_3 heissen. Spezialisiert man eine oben durchgeführte Rechnung für den Fall $\mu = 2$, so sieht man, was auch direkt leicht gesehen werden kann, dass

$$\int \frac{\mathfrak{F}_i(x)}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}\,dx \quad (16)$$

auf Grund der Substitution S_i reduziert werden kann, wenn

$$\mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i S_i \equiv 0 \quad (17).$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Kompositionsgesetze der Vierergruppe kann jede der drei in (17) enthaltenen Gleichungen noch in einer zweiten Form geschrieben werden, welche entsteht, wenn man die cyklisch folgende Substitution S_j darauf anwendet:

$$\mathfrak{F}_i S_j + \mathfrak{F}_i S_k \equiv 0 \quad (17a)$$

Danach erhält man, durch Addition der drei Integraltypen (16) und Addition der 6 in (17) und (17a) einbegriffenen Gleichungen, das Resultat, dass für die rationale Funktion $F(x)$ im allgemeinsten reduzierbaren Integral der von uns betrachteten Art

$$\int \frac{\mathfrak{F}(x)}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}\,dx$$

die Funktionalgleichung erfüllt sein muss:

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}S_1 + \mathfrak{F}S_2 + \mathfrak{F}S_3 \equiv \sum_0^3{}_i \mathfrak{F}S_i \equiv 0 \quad (18).$$

Das Bestehen von (18) reicht zur Reduktion auch hin, weil $\mathfrak{F}$ in der Form $\Phi_1 + \Phi_2$ zusammengesetzt werden kann aus $\Phi_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{F} + \mathfrak{F}S_i)$, $\Phi_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}S_i)$, von denen die zweite, weil $S_i^2 = 1$ ist, auf Grund ihres Bildungsgesetzes der Gleichung $\Phi_2 + \Phi_2 S_i \equiv 0$, die erste aber der Gleichung $\Phi_1 + \Phi_1 S_j \equiv 0$ (und $\Phi_1 + \Phi_1 S_k \equiv 0$) auf Grund von (18)[1]; damit eröffnet sich, auch in den einfachsten Fällen, eine Vielfachheit von Reduktionsmöglichkeiten, und zugleich ergibt sich das nicht uninteressante Resultat, dass die Anzahl der Integrale nach der Reduktion stets kleiner als 3 gehalten werden kann[2]). Noch sei bemerkt, dass

---

1) Im wesentlichen nach Goursat, l. c.

2) Der Grund davon ist natürlich, dass schon eine Funktion F_3 sich als Summe von 2 Funktionen F_1 und F_2 darstellen lässt. In der Tat: Genügt F_3 der Gleichung $F_3 + F_3 S_3 = 0$, so genügt es auch (18); es ist aber $F_3 \equiv \frac{1}{2}(F_3 + F_3 S_1) + \frac{1}{2}(F_3 - F_3 S_1) = \Phi_1 + \Phi_2$, und $\Phi_1 + \Phi_1 S_2 \equiv 0$, $\Phi_2 + \Phi_2 S_1 \equiv 0$.

es nur deshalb möglich ist, eine so einfache Bedingungsgleichung wie (18) zu bilden, weil in der Vierergruppe drei gleichberechtigte (und ausgezeichnete) Untergruppen zweiter Ordnung vorkommen, nach denen sie zerlegt werden kann.

Da S_1, S_2 und S_3 je eine der drei gleichberechtigten, zur Diedergruppe 8ter Ordnung isomorphen Permutationsgruppen 8ter Ordnung gestatten, welche in der symmetrischen Gruppe von 4 Elementen vorkommen, so gestattet die linke Seite von (18) diese symmetrische Gruppe selbst, und ist darum eine rationale Funktion der Koeffizienten unseres Polynoms vom 4ten Grade. Betrachten wir jetzt für den Augenblick $\mathfrak{F}(x)$ als ganze Funktion, so können wir sagen, dass das Bestehen von (18) keineswegs mit dem Verschwinden einer Kovariante von $\mathfrak{F}(x)$ und $R_4(x)$ gleichbedeutend ist, wie man vielleicht vermuten dürfte. Denn, indem man z. B. versucht, speziell für eine ganze Funktion $\mathfrak{F}(x) = c_0x^2 + 2c_1x + c_2$ von zweiten Grade die gefundene Bedingung auszuwerten — und für diesen Fall liegt vom Standpunkt des praktischen Rechners aus allein ein Bedürfnis danach vor —, seigt sich, dass die vermeintliche Kovariante von der 3ten Ordnung in x und in den Koeffizienten von $\mathfrak{F}(x)$ linear sein müsste; eine solche Kovariante gibt es aber in dem Formensystem einer biquadratischen und qnadratischen Form nicht; auch durch direkte Ausrechnung des Koeffizienten von x^8 kann man sich überzeugen, dass er nicht isobar in den Wurzeln von $R_4(x)$ ist, eine Kovariante folglich nicht vorliegen kann[1]).

Für das spezielle Polynom $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ wird die Bedingungsgleichung (18) zu

$$\mathfrak{F}(x) + \mathfrak{F}(-x) + \mathfrak{F}\left(\frac{1}{kx}\right) + \mathfrak{F}\left(-\frac{1}{kx}\right) \equiv 0 \quad (18a),$$

welche, wenn $\mathfrak{F}(x)$ vom zweiten Grade ist, die triviale Forderung ausspricht, dass c_0 und c_2 verschwinden müssen. Ist weiter $\mathfrak{F}(x) \equiv F(x^2)$, so fordert (18a), dass

$$F(x^2) + F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) \equiv 0 \quad (18b)$$

sei. Sowohl diese Bedingung (18b) als auch die allgemeinere

$$F(x^2) + F\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) + F\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right) + F\left(\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right) \equiv 0 \quad (18c)$$

sind von Hermite (Journal de Lionville, 1880) gefunden worden. Zu der letzteren vergleiche man die Tatsache, dass vermöge der involutorischen Beziehung $x^2 = \frac{1-y^2}{1-k^2y^2}$

---

1) Man findet: $(\Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^2\beta + 2\Sigma\alpha\beta\gamma)^2(b_0 + 3b_2) + (\Sigma\alpha^2\beta - \Sigma\alpha^2\beta\gamma - 2\Sigma\alpha^2\beta^2 + 12\alpha\beta\gamma)^2b_0 +$ einem Term in b_1!

$$\int \frac{F(x^2)}{\sqrt{1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx = \int \frac{F\left(\frac{1-y^2}{1-k^2y^2}\right)}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\,dy. -$$

Von den speziellen Polynomen $R_4(x)$ sind zunächst diejenigen hervorzuheben, deren Invariante j verschwindet. Die Wurzeln bilden dann ein harmonisches Quadrupel und das Polynom kann folglich linear auf die Form $z(z^2-4)$ transformiert werden; doch können dieser Gestalt zunächst nicht invariante Differentiale zugeordnet werden. Bedenkt man aber, dass j die Katalektikante von R_4 ist, so wird offenbar, dass dieses auch auf z^4+1 (oder z'^4-1) linear transformiert werden kann[1]), und man ersieht daraus, dass $y^2 = R_4(x)$ alsdann nicht nur eine Diedergruppe 4ter Ordnung, sondern eine solche 8ter Ordnung gestattet. Man erkennt das auch direkt, indem man jene Punkte 0, ∞, 2, -2 auf die Riemannsche Kugel überträgt.

Diese Gruppe enthält ausser der Einheit 2 Substitutionen von der Periode 4, nämlich: (z, iz') und $(z, -iz')$ und 5 von der Periode 2. Für die erstere muss $\lambda = 1$ oder $= 3$ sein; jedenfalls wird dann aber schon durch $t = z^2$ Reduktion auf das Geschlecht 0 erzielt, und es zeigt sich also, dass diesen Substitutionen kein neuer Typus von reduzierbaren Integralen entspricht. Es bleiben 4 wesentlich verschiedene Typen — mit Berücksichtigung dessen, dass die Gruppe eine Vierergruppe enthält, die nur 2 verschiedene Typen liefert. Indem wir also noch die Normalformen der Substitutionen $\left(z, \frac{1}{z'}\right)$; $\left(z, \frac{i}{z'}\right)$; $\left(z, \frac{-i}{z'}\right)$ aufstellen, können wir sofort als allgemeinstes hieher gehöriges reduzierbares Integral das folgende anschreiben:

$$(19)\quad \int \left[\Phi_1(z^2)z + \Phi_2\left(\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right)\frac{z-1}{z+1} + \Phi_3\left(\left(\frac{z+\frac{1+i}{2}}{z-\frac{1+i}{2}}\right)^2\right)\cdot \right.$$
$$\left. \frac{z+\frac{1+i}{2}}{z-\frac{1+i}{2}} + \Phi_4\left(\left(\frac{z+\frac{1-i}{2}}{z-\frac{1-i}{2}}\right)^2\right)\frac{z+\frac{1-i}{2}}{z-\frac{1-i}{2}} \right] \frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}.$$

Es ist leicht, für das Polynom $F(z)$ dieses allgemeinsten Integrals, die Bedingung

$$\sum_0^7 i\, FS_i \equiv 0$$

1) Als neue Grundpunkte sind dafür die Punkte eines der Faktoren von T. einzuführen; die Doppelemente der erhaltenen cyklischen Projektivität sind gleichfalls 2 Elemente von T.

als notwendig zu erweisen. Weitere Schlüsse in dieser Richtung werden aber durch das exzeptionelle Verhalten der Substitutionen von der Periode 4 erschwert.

Die einfachsten Fälle entstehen, wenn man für die willkürlichen Funktionen Φ_i im besonderen willkürliche Konstante c_i (verschieden von 0 oder gleich 0) einsetzt.

Wenn wir uns jetzt zu dem 2ten ausgezeichneten Fall eines Polynoms 4ten Grades wenden, mit verschwindender Invariante i, dh. mit 4 äquianharmonischen Wurzelpunkten, kommen wir über die einfachen zyklischen und Vierergruppen, mit denen wir es bisher zu tun hatten, hinaus und zu dem Fall der Tetraedergruppe (mit der Ordnung 12)[1]). Das Neue, das sie bietet, sind Substitutionen von der Periode 3; wir werden darum die Tetraederfunktion nicht, wie üblich in der Gestalt $x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1$ annehmen, sondern in einer solchen, die unmittelbar die Möglichkeit derartiger Substitutionen erkennen lässt, dh. Funktion von z^3 ist: Wird 1 Punkt nach 1 verlegt, so fallen 2 andere nach ε und ε^2, $\varepsilon^3 \equiv 1$, und der 4te kann nur einer der Doppelpunkte der zyklischen Substitution sein, also 0 oder ∞; beide Fälle sind nicht wesentlich verschieden; wir nehmen den zweiten, und legen also, mit Goursat, das Polynom z^3-1 zu Grunde. Man überzeugt sich auch leicht hinterher, dass die Invariante i dieses speziellen Polynoms vierten Grades verschwindet. Die zugehörige, durch einfache Rechnungen aus der von Klein gegebenen herzuleitende Gruppe findet sich bei Goursat, l. c., vollständig aufgestellt; sie lautet, möglichst kurz geschrieben:

$$z,\ \frac{z+2}{z-1},\ \frac{z+2\varepsilon}{\varepsilon^2 z-1},\ \frac{z+2\varepsilon^2}{\varepsilon z-1};$$

$$\varepsilon z,\ \frac{z+2\varepsilon^2}{z-\varepsilon^2},\ \frac{z+2}{\varepsilon^2 z-\varepsilon^2},\ \frac{z+2\varepsilon}{\varepsilon z-\varepsilon^2};$$

$$\varepsilon^2 z,\ \frac{z+2\varepsilon}{z-\varepsilon},\ \frac{z+2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 z-\varepsilon},\ \frac{z+2}{\varepsilon z-\varepsilon}.$$

Die Substitutionen der ersten Zeile bilden eine Vierergruppe, welche als ausgezeichnete Maximaluntergruppe in der Tetraedergruppe enthalten ist; die Substitutionen der zweiten und dritten Zeile gehen aus den darüber stehenden der ersten Zeile durch Zusammensetzung mit εz, bez. $\varepsilon^2 z$ hervor. Wir nennen die Substitutionen, von links nach rechts und von oben nach unten gelesen, der Reihe nach S_0, S_1 . . . S_{11}.

Zur Aufstellung reduzierbarer Integrale, hat man weiter nichts zu tun als die Normalformen der Substitutionen auszurechnen, — was durch Goursat, l. c, für die 4 Cyklen dritter

1) Nach dem bekannten Satze von Wedekind; ein schöner Beweis desselben durch direkte Rechnung mit Hilfe der typischen Darstellung findet sich in der neuen Auflage von Clebsch-Lindemanns Vorlesungen über Geometrie.

Ordnung geschehen ist; einige Vorsicht ist dabei jedoch hinsichtlich dieser letzteren zu beobachten, sofern, wenn $\frac{Z-Z_1}{Z-Z_2} = \alpha \frac{Z'-Z_1}{Z'-Z_2}$ die Normalform derselben ist, erst die wirkliche Ausrechnung zeigt, ob bei Einführung von $Z = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ das transformierte Polynom, von konstanten Faktoren abgesehen, die Gestalt Z^3-1 oder $Z(Z^3-1)$ annimmt; denn im ersten Fall ist $\lambda = 2$, im zweiten $\lambda = 1$ zu setzen.

Bezeichnen wir wieder mit $F(z)$ das Polynom im allgemeinsten Integral, so ist klar, dass hier, wo neben einander Substitutionen vorkommen, deren Ordnungen verschiedene, unter einander prime Zahlen sind, nicht so leicht notwendige Bedingungen für $F(z)$ nach Analogie der anderen behandelten Fälle sich finden lassen. Dagegen kann man für die Polynome $F(z)$ bei besonderen Arten von Reduktion hinreichende Bedingungen angeben.

Vor allem dann, wenn ein zu $u^2 = z^3 - 1$ gehöriges Integral sich zerlegen lässt in drei durch Substitutionen 2ter Ordnung reduzierbare Integrale und ein durch eine Substitution 3ter Ordnung reduzierbares. Dazu ist nötig, aus den FS_i 4 additive Verbindungen $\psi_i(z)$ hervorzutreiben, die sich, eventuell mit konstanten Koeffizienten identisch zu $F(z)$ zusammensetzen lassen und von denen auf Grund ihrer Bildungsgesetze und der Kompositionsgesetze der Tetraedergruppe drei den Bedingungen für Reduktion „2ter Ordnung", eine den Bedingungen für Reduktion „3ter Ordnung" genügen. Eine Funktion ψ_1 der letzteren Art muss aber schliesslich die Form haben $z^2\,\chi(z^3)$, und das kann in äquivalenter Weise ausgedrückt werden durch die 2 Gleichungen $\sum_0^2 \nu\, \psi_1(\varepsilon^\nu z) \equiv 0$, $\sum_0^2 \nu\, \varepsilon^{3-\nu}\psi_1(\varepsilon^\nu z) \equiv 0$; wie man einsieht, wenn man, mit Zuhilfenahme der Taylorschen Entwicklung, $\psi_1(z)$ in der Form sich denkt: $\Psi_0(z^3) + z\Psi_1(z^3) + z^2\Psi_2(z^3)$: Die erste Gleichung hat zur Folge, dass Ψ_0, die zweite, dass Ψ_1 identisch verschwindet[1]). Die 3 Substitutionen von der Periode 2, um die es sich bei der Reduktion zweiter Ordnung nur handeln kann, sind S_1, S_2, S_3. Erinnert man sich noch, dass aus $S_0 \ldots S_3$ durch Zusammensetzung mit εz, $\varepsilon^2 z$ alle übrigen hervorgehen, so wird es naheliegend erscheinen, $\sum_0^3 i\, FS_i$ für ψ_1 zu wählen, und

---

1) Allgemein: Soll $\Phi(z)$ die Form $z^{n-1}\Phi_{n-1}(z^n)$ haben, so ist hinreichend, dass $\sum_0^{n-1} \nu\, \varepsilon^{n-\nu\mu}\Phi(\varepsilon^\nu z) \equiv 0$ ist; $\mu = 0, \ldots n-2$; ε primitive n^{te} Einheitswurzel. Von diesen bedingt die μ^{te} den Wegfall von $\Phi_{\mu-1}(z^n)$.

demgemäss zu fordern, dass $\sum_{0}^{11} S_i \equiv 0$, $\sum_{4}^{3} S_i + \varepsilon^2 \sum_{8}^{7} S_i + \varepsilon \sum_{8}^{11} S_i \equiv 0$: Bedingungen für ψ_2, ψ_3, ψ_4 können durch Wahl geschickter, den gestellten Anforderungen genügender Bildungsgesetze derselben erspart werden: $\psi_2(z) \equiv F - FS_1 + FS_2 - FS_3$ gibt $\psi_2 + \psi_2 S_1 \equiv 0$ (oder $\psi_2 + \psi_2 S_3 \equiv 0$); $\psi_3(z) \equiv F - FS_1 - FS_2 + FS_3$ gibt $\psi_3 + \psi_3 S_2 \equiv 0$: $\psi_4(z) \equiv F + FS_1 - FS_2 - FS_3$ gibt $\psi_4 + \psi_4 S_3 \equiv 0$; schliesslich ist $F(z) \equiv \frac{1}{4} \sum_{1}^{4} \psi_i(z)$. Der zweiten der obigen Bedingungen gibt Goursat die elegantere Form $\sum_{0}^{11} \frac{1}{\mu_i^2} S_i \equiv 0$, indem er unter μ_i den „Multiplikator" von S_i versteht, dh. diejenige Einheitswurzel, welche in der Normalform von S_i vorkommt, wenn für Z_1 speziell derjenige Pol von S_i genommen wird, der etwa in der Reihe der Wurzelpunkte ∞, 1, ε, ε^2 auftritt; die Substitutionen der zweiten Reihe haben den Multiplikator ε^2, diejenigen der dritten den Multiplikator ε. Zurückblickend können wir behaupten, dass der eigentliche Existenzgrund des Goursatschen Satzes in der Tatsache zu suchen ist, dass gerade die Vierergruppe innerhalb der Tetraedergruppe den Index 3 besitzt.

Ein zweiter ausgezeichneter Fall wäre der der Reduktion auf 4 Integrale durch 4 Transformationen 3ter Ordnung; nach dem Gesagten wären 8 Bedingungsgleichungen anzusetzen: aus diesem Grunde, und weil es nicht möglich erscheint, den ψ_i volle Symmetrie zu geben, gehen wir nicht weiter darauf ein.

Die zwei anderen Grundformen der Tetraedergruppe, in der Gestalt, wie wir sie hier benützt haben, sind $z(8 - z^3)$ und $z^6 + 12z^3 + 8$; sie bieten zu denselben Ueberlegungen Veranlassung, wie das Polynom z^3—1, nur dass im hyperelliptischen Fall die Stellung unserer reduzierbaren Integrale prinzipiell eine andere ist. Die allgemeinsten Grundformen und zugehörigen Integrale ergeben sich durch Ausübung einer allgemeinen linearen Transformation; die für unsere Zwecke überhaupt allgemeinsten invarianten Formen der Tetraedergruppe dadurch, dass man in ein beliebiges Polynom $R_\mu(x)$ an Stelle von x einführt $\left[\frac{z^3-1}{z(z^3-8)}\right]^3$ und hierauf linear gebrochen transformiert. —

Wenn man, von einer allgemeinen Form 4ten Grades ausgehend, die Kovariante T vom 6ten Grade bildet, so erhält man ein System von 3 wechselseitig harmonischen Punktepaaren, welches durch eine Oktaedergruppe in sich übergeführt wird: In der Tat ist ja $(TT)_4 \equiv 0$ [1]). Man wird solche Polynome in

---

1) Invariant charakterisiert durch $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $A \gtrless 0$; Bolza, l. c.

der Gestalt $z(z^4-1)$, wie üblich, benützen. Das Neue, das die Oktaedergruppe der Tetraedergruppe gegenüber aufweist, sind Substitutionen der Periode 4. Da jedoch bei Einführung von Z für diese Substitutionen das neue Polynom im wesentlichen immer wieder die Gestalt haben muss $Z(Z^4-a)$, ν_1 also stets = 1 bleibt, so entspricht keiner derselben ein reduzierbares Integral. Diese Tatsache macht die Aufstellung von Bedingungsgleichungen für ausgezeichnete Arten der Reduktion nach Analogie der bei der Tetraedergruppe gewonnenen unmöglich.

Auch die zur alternierenden Gruppe von 5 Elementen isomorphe Ikosaedergruppe, deren Struktur mit Hilfe dieses Isomorphismus am einfachsten studiert wird, gibt zu neuen Bemerkungen keinen Anlass.

Wir glauben daher auf genauere rechnerische Durchführung dieser Fälle verzichten zu dürfen.

Curriculum vitae.

Geboren am 22. Juni 1883 zu Schwabach in Mittelfranken, besuchte ich die Simultanschule und das Progymnasium dortselbst, hierauf das Neue Gymnasium zu Nürnberg; hier absolvierte ich Juli 1901. An den Universitäten zu München, Leipzig und Erlangen studierte ich dann Philosophie, Mathematik, Physik und Astronomie; daneben beschäftigte ich mich mit der vergleichenden Grammatik der indogermanischen Sprachen und suchte mir für diesen Zweck Kenntnisse in den dafür klassischen Sprachen (Sanskrit, Gotisch, Litauisch u. dgl.), sowie in den modernen germanischen, romanischen und slavischen Sprachen zu verschaffen, Bemühungen fortsetzend, die ich auf dem Gymnasium begonnen hatte. Ich hörte die Vorlesungen der Herren Geheimräte und Professoren: Bauer †, v. Baeyer, v. Braunmüll, Brentano, Döhlemann, Engel, Fleischmann, Graetz, Grauert, Hofmann, Krumbacher, Lindemann, Lipps, Neumann, Noether, Pringsheim, Roentgen, Scherman, Voss, v. Weber, Wiener, Windisch. Im Jahre 1903 unterzog ich mich dem ersten Abschnitt, im Jahre 1905 dem zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Im Schuljahre 1905/06 wurde ich dann am Realgymnasium zu München unter Leitung des Herrn Oberstudienrats Dietsch in die Lehrkunst und die Lehrtechnik eingeführt.

Allen, deren Lehre mir zu teil geworden, sage ich bei dieser Gelegenheit herzlichsten Dank.